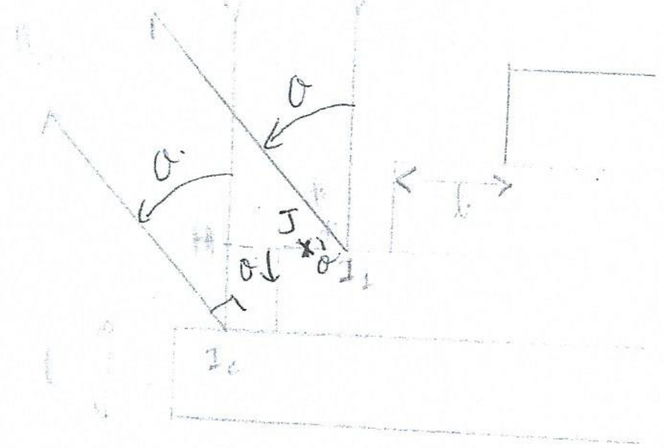
Exercice n° 7 : Réseau à échelons de Michelson



① $\delta_{e_{1/2}} = (SM)_2 - (SM)_1 = \cancel{S}H + HI_2 + I_2\cancel{M} - (S\cancel{I_1} + I_1K + K\cancel{M})$

$= HI_2 - I_1K$

$= t - I_2K$ ↳ ?

HJI_2 triangle rectangle en H $\quad \dfrac{HI_2}{HJ} = \tan\theta \Rightarrow HJ = \dfrac{HI_2}{\tan\theta} = \dfrac{t}{\tan\theta}$

puis $\quad HI_1 = HJ + JI_1 = b \Rightarrow JI_1 = b - \dfrac{t}{\tan\theta}$

puis $\sin\theta = \dfrac{KI_1}{JI_1} \Rightarrow KI_1 = JI_1 \sin\theta$

donc $\quad KI_1 = \left(b - \dfrac{t}{\tan\theta}\right)\sin\theta = b\sin\theta - t\cos\theta$

d'où finalement $\quad \delta_{e_{1/2}} = t(1+\cos\theta) - b\sin\theta$

② Intensité diffractée :

$\psi_T(M) = \psi_1(M) + \psi_2(M) + \dots \psi_N(M)$

avec $\quad \psi_i(M) = \psi_0\, e^{j(\omega t - k\,SI_iM)}$

$$\psi_T = \psi_0\, e^{j(\omega t - k\,SI_1M)}\left(1 + e^{jk\overbrace{(SI_2M - SI_1M)}^{\delta_{21}}} + e^{jk\overbrace{(SI_3M - SI_2M)}^{2\delta_{21}}} + \dots + e^{jk\underbrace{(SI_NM - SI_1M)}_{(N-1)\delta_{21}}}\right)$$

on pose $\Delta\varphi = k.\delta_{e_{21}}$

Suite de raison : $q = e^{j\varphi}$.

$$\psi_T = \psi_0\, e^{j(\omega t - k SI_1 M)} \frac{1 - e^{jN\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} = \psi_0\, e^{j(\omega t - k SI_1 M)} \frac{e^{j\frac{N\varphi}{2}}}{e^{j\frac{\varphi}{2}}} \frac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

donc $I = \psi_T \psi_T^* = N^2 I_0 \left[\dfrac{\sin\frac{N\varphi}{2}}{N \sin\frac{\varphi}{2}}\right]^2$ (résultat déjà établi ds le cours pour le cas du réseau "classique")

$$\varphi = k \cdot \delta_{P1} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(t(1+\cos\theta) - b\sin\theta\right)$$

Maxima principaux pour $\delta_{P1} = p\lambda$ soit

$$t(1+\cos\theta) - b\sin\theta = p\lambda$$

θ petit $\Rightarrow$ $\begin{cases} \cos\theta \approx 1 \\ \sin\theta \approx \theta \end{cases}$

donc $2t - b\theta = p\lambda \rightarrow \theta_{max.} = \dfrac{2t - p\lambda}{b}$

A.N. $\theta = 0$ on a $p = \dfrac{2t}{\lambda} = \dfrac{2\times10^{-2}}{500.10^{-9}} = 4.10^4$

NB : dispersif pour $\theta = 0$

③ Pouvoir de résolution : $\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = pN = PR.$

$\Rightarrow \Delta\lambda = \dfrac{\lambda}{pN} = \dfrac{500.10^{-9}}{4.10^4 \times 15} = 0{,}83$ pm.

Exercice n°8 : Résolution de problème : des lunettes confortables

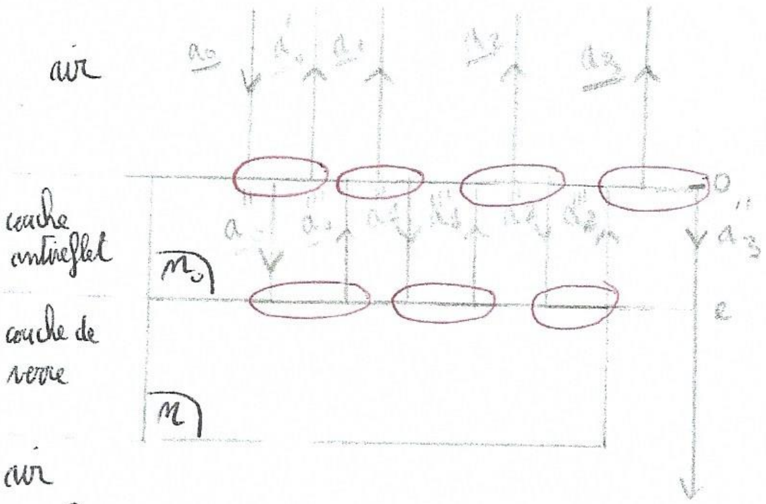
① Il faut simplement assurer que l'onde totale qui se propagerait en sens $x\downarrow$ dans l'air possède une amplitude nulle.

② Les ≠ ondes réfléchies (1 seule) puis transmises (une infinité) dans l'air sont d'amplitude complexes respectives :

$\underline{a}_0'$: amplitude complexe de l'onde réfléchie sur l'interface air - couche antireflet

$\underline{a}_i$: ——— ——— (s) transmise(s) $i = \{1, 2, \cdots \infty\}$ de la couche antireflet vers l'air

schéma de situation :



« '' » : descendant

« ''' » : montant

Coefficient de réflexion et de transmission : (uniquement ceux utiles)

air-couche antireflet : $\rho_0 = \dfrac{1-n_0}{1+n_0} = \dfrac{\underline{a}_0'}{\underline{a}_0} = -r_0$ d'après la définition de r_0

$\tau_0 = \dfrac{2n_{air}}{n_{air}+n_0} = \dfrac{2}{n_0+1} = \dfrac{1-n_0+n_0+1}{1+n_0} = 1-r_0$

couche antireflet - verre : $\rho_1 = \dfrac{a_i'''}{a_i''} = \dfrac{n_0-n}{n_0+n} = r$

couche antireflet - air : $\rho_1' = \dfrac{a_{i+1}''}{a_i'''} = \dfrac{n_0-1}{n_0+1} = r_0$

$\tau_1' = \dfrac{2n_0}{1+n_0} = \dfrac{n_0-1+n_0+1}{1+n_0} = r_0+1$

Amplitudes des $\neq$ ondes :

$$\underline{a}_0' = -r_0 a_0$$

$$\underline{a_1} = \underline{a}_0'''(1+r_0) = \rho_1 \underline{a}_0''(1+r_0) = r\, \underline{a}_0''(1+r_0) = r(1+r_0)(1-r_0)a_0 e^{-j\varphi}$$

$$= r(1-r_0^2)e^{-j\varphi}a_0$$

$$\underline{a_2} = a_1'''(1+r_0) = \rho_1 a_1''(1+r_0) = r\, a_1''(1+r_0) = r(1+r_0)a_1' = r r_0(1+r_0)\underline{a}_0'''$$

$$= (1-r_0)r^2 r_0(1+r_0)a_0 e^{-2j\varphi} = \underline{r}(1-r_0^2)(r_0 r)e^{-2j\varphi}a_0$$

$$\vdots$$

$$\underline{a_n} = \underline{r}(1-r_0^2)(r_0 r)^{n-1}e^{-jn\varphi}a_0$$

soit $\boxed{a_n = \frac{\cancel{r}}{\cancel{r} r_0}(1-r_0^2)\left(r_0 r\, e^{-j\varphi}\right)^n a_0}$

③ Condition de bon fonctionnement : il faut annuler l'onde totale réfléchie a_t

$\Rightarrow$ nécessité de calculer a_t !

$$a_t = a_0' + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -r_0 a_0 + a_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-r_0^2)}{r_0}\left(r_0 r\, e^{-j\varphi}\right)^n$$

$$= -r_0 a_0 + \underbrace{a_0\,\frac{1-r_0^2}{r_0}}_{A}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(r_0 r\, e^{-j\varphi}\right)^n}_{\text{série géométrique de raison } q = r_0 r e^{-j\varphi}} = -r_0 a_0 + A\, r_0 r\, e^{-j\varphi}\frac{1}{(1-r_0 r e^{-j\varphi})}$$

$$a_t = -r_0 a_0 + a_0\frac{(1-r_0^2)}{\cancel{r_0}}\cancel{r_0} r\frac{e^{-j\varphi}}{1-r_0 r e^{-j\varphi}} = a_0\left(-r_0 + \frac{r(1-r_0^2)e^{-j\varphi}}{1-r_0 r e^{-j\varphi}}\right)$$

$$= a_0\left(\frac{-r_0 + \cancel{r_0^2 r e^{-j\varphi}} + r e^{-j\varphi} - \cancel{r r_0^2 e^{-j\varphi}}}{1-r_0 r e^{-j\varphi}}\right) \Rightarrow \boxed{a_t = \left(\frac{r e^{-j\varphi} - r_0}{1-r_0 r e^{-j\varphi}}\right)}$$

Pour avoir une couche antireflet il faut donc $a_t = 0$ soit $r e^{-j\varphi} = r_0$

or $r_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$ donc il faut $e^{-j\varphi} = \pm 1$

▫ Cas $e^{-j\varphi} = +1 \Rightarrow r = r_0 \Rightarrow \dfrac{n_0 - n}{n_0 + n} = \dfrac{n_0 - 1}{n_0 + 1} \Rightarrow n = 1$

incohérent pour du verre

▫ Cas $e^{-j\varphi} = -1 \Rightarrow r = -r_0 \Rightarrow \dfrac{n_0 - n}{n_0 + n} = \dfrac{-(n_0 - 1)}{n_0 + 1} \Rightarrow (n_0 - n)(n_0 + 1) = (1 - n_0)(n + n_0)$

$\Rightarrow n_0^2 + \cancel{n_0} - \cancel{n n_0} - n = n + \cancel{n_0} - \cancel{n_0 n} - n_0^2$

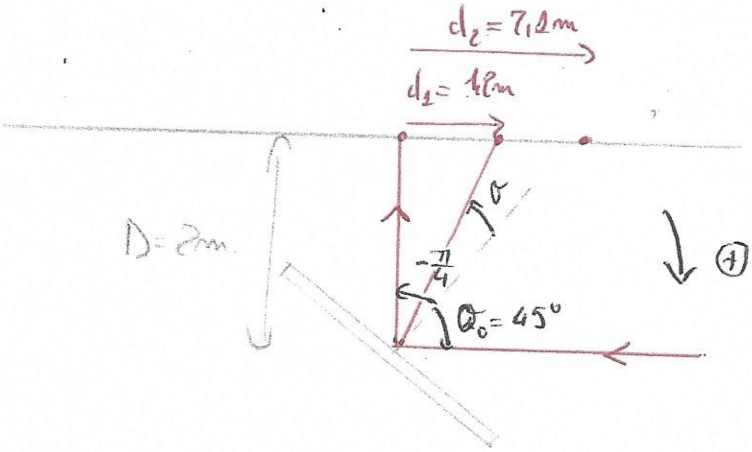
$\Rightarrow 2 n_0^2 = 2n \Rightarrow \boxed{n = \sqrt{n_0}}$

il faut également $\varphi = (2p+1)\pi \Rightarrow \dfrac{2\pi}{\lambda} 2ne = (2p+1)\pi$

$$\Rightarrow \boxed{e = (2p+1)\frac{\lambda}{4n} = \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2n}}$$

Bilan 2 conditions : $\begin{cases} n = \sqrt{n_0} \\ e = (p + 1/2)\dfrac{\lambda}{2n} \end{cases}$ pour assurer le comportement "antireflet"

Exercice n°9 : Capacité des | CD-ROM
| DVD-ROM



Interprétation : image géométrique : simple reflexion du faisceau sur la surface.

tâches lumineuses courbées : + la courbure traduit la géométrie du support diffractant (sillons creusés sur la surface du disque)
+ chaque tâche correspond à un ordre de diffraction : | K = 1 pour la 1ère
| K = 2 —— 2nde.

Recherchons le "pas" ie distance entre sillons du support :

$$a(\sin\theta + \sin\theta_0) = k\lambda$$

réseau en réflexion

$\theta_0 = +45°$
$\theta_{1/2} = \,?$ $\Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{d_1}{D}\right)$

A.N. $\theta_1 = -\frac{\pi}{4} + 0{,}540$
$= -0{,}245$ rad.

K=1
$\Rightarrow$ $\boxed{a = \dfrac{\lambda}{\sin\theta_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}}$ A.N $a = 1{,}36\,\mu m$

avec $\theta_2 = -\frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{d_2}{D}\right)$

K=2
$\Rightarrow$ $\boxed{a = \dfrac{2\lambda}{\sin\theta_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}}$ A.N. $a = 1{,}73\,\mu m$. A.N. $\theta_2 = -\frac{\pi}{4} + 0{,}809$
$\theta_2 = -0{,}024$ rad.

$\Rightarrow \bar{a} = 1{,}5\,\mu m$

Capacité approximative :

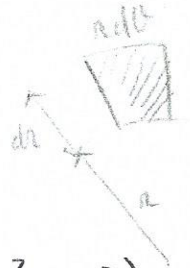
CD : $\varnothing \approx 12$ cm

$R_1 = 2,3$ cm

$R_2 = 6$ cm.

(H) On pose que chaque facette diffractante est carrée et occupe $\Lambda = a^2$

© si S est la surface utile totale alors $N = \frac{S}{\Lambda}$ nbre de bits stockable



Calcul de la surface utile :

$$dS = r\,dr\,d\theta$$

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{R_1}^{R_2} r\,dr = \frac{2\pi}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right) = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)$$ logique

d'où $N = \frac{\pi}{a^2}\left(R_2^2 - R_1^2\right)$ soit en octets :

$$\Rightarrow N_o = \frac{\pi}{8a^2}\left(R_2^2 - R_1^2\right) = 535\,990\,023 \text{ octets}$$

$$\Rightarrow N_o = 511 \text{ Mo}$$

Pour le DVD : on trouve

$$a = \frac{\lambda}{\sin\theta_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \theta_1 = -\frac{\pi}{4} + \underbrace{\arctan\left(\frac{2,1}{2}\right)}_{\simeq \frac{\pi}{4}} \simeq 0$$

$$a \approx \frac{2\lambda}{\sqrt{2}} = 0,895\ \mu m.$$

d'où $N = \frac{S}{a^2} \Rightarrow N_o = \frac{S}{8a^2} = \frac{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{8a^2}$

$= 1\,505\,544\,620$ octets

$$\Rightarrow N_o = 1,4 \text{ Go}$$

© Valeurs réelles de capacités : CDROM $N_o = 640$ Mo $\Rightarrow$ bonne estimation

DVD ROM $N_o = 4,7$ Go $\Rightarrow$ seul l'ordre de grandeur est bien estimé